非等スペクトル線形問題の定式化について (非線形波動現象の数理と応用)

戸田, 晃一

数理解析研究所講究録
第1645巻 2009年 146-156

非等スペクトル線形問題の定式化について

富山県立大学・工学部　戸田 晃一 (Kouichi TODA) *
Faculty of Engineering,
Toyama Prefectural University

概要

通常，非線形可積分系に付随する線形問題（Lax 対）に現れるスペクトル変数は，その系の時空変数（独立変数）に対して**定数**である．これを等スペクトル線形問題と呼ぶ．それでは，いつでもスペクトル変数は定数であることが要求されるのであろうか，というのはごく自然な問題意識であろう．本稿では，スペクトル変数がその系の時空変数に対して**定数**でない場合，つまり**非等スペクトル線形問題**と，関連する高次元非線形可積分階層の定式化について紹介する．

1 はじめ

ソリトン方程式に代表される非線形な無限自由度の連続系において，現時点で，（少なくとも非線形可積分系の研究者の間では，）考えている力学系が以下の性質（証拠）；

1. **線形化可能な時**
2. **逆散乱法で解ける時**
3. **Lax 対の存在**
4. **Liouville-Arnold の意味での「可積分性」**
5. **無限個の保存量・対称性の存在**
6. **bi-Hamilton 構造**
7. **厳密解の存在**
8. **Bäcklund 変換の存在**
9. **Painlevé 性（または Painlevé 判定法をパスする時）**

のどれか一つでももてば「非線形可積分系」（の候補）であると考えられている [1, 2]．本稿では，非等スペクトル線形問題なるものを紹介するが，それは上記に挙げた 9 つの性質（証拠）のどれと関係しているのかというと，次にみるような **3.Lax 対の存在**である．

2 次元時空上の（形式的）波動関数ベクトル $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ に対する線形問題：

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{X}\psi, \\ \psi_t = \mathcal{T}\psi \end{cases} \tag{1}$$

*kouichi@yukawa.kyoto-u.ac.jp

を考える．但し，行列演算子 $\mathcal{X}$ および $\mathcal{T}$ を，2 次正方行列：

$$\begin{cases} \mathcal{X} = -i\eta\sigma_3 \ + \ u\sigma_+ \ - \ \sigma_-, \\ \mathcal{T} = \frac{1}{2}\left(i\eta u - 2u_x\right)\sigma_3 \ + \ \frac{1}{4}\left(2i\eta u_x - u_{xx} - 2u^2\right)\sigma_+ \ + \ \frac{1}{2}u\sigma_- \end{cases} \tag{2}$$

で与えられているとする．ここで，

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である．また，$u = u(t,x)$ および スペクトル変数 $\eta = \eta(t)$ としている．この線形問題 (1) は，**Ablowitz-Kaup-Newell-Segur（AKNS）階層**[3] を与える．それをみていく．

両立条件（可積分条件）：

$$(\psi_x)_t = (\psi_t)_x \iff [\partial_x,\ \partial_t] = 0 \tag{4}$$

より，線形問題 (1) は可換条件：

$$[\partial_x - \mathcal{X},\ \partial_t - \mathcal{T}] = 0 \iff \mathcal{X}_t - \mathcal{T}_x + [\mathcal{X},\ \mathcal{T}] = 0 \tag{5}$$

と等価となる[1]．そして，スペクトル変数 η が

$$\eta_t = 0 \tag{6}$$

を満たすとすると,（可積分な）ソリトン方程式の代表である，Korteweg-de Vries（KdV）方程式 [4]：

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x = 0 \tag{7}$$

と可換条件 (5) が等価となる．このとき条件 (6) を **等スペクトル（*isospectral*）条件**，線形問題 (1) を**等スペクトル線形問題**，そして可換条件 (5) を（**等スペクトル）Lax 方程式**とそれぞれ呼ぶ．つまり，等スペクトル条件 (6) は，可換条件 (5) と KdV 方程式 (7) が等価となるために要求された条件に過ぎないのである[2]．それでは，スペクトル変数は時空変数（独立変数）に対して 定数であること がいつでも要求されるのであろうか，というのはごく自然な問題意識であろう．

これまでにも断続的に非等スペクトル線形問題は研究されてきた [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]．本稿では，これまでの非等スペクトル線形問題に関する研究成果を踏まえて，$(1+1)$ 次元等スペクトル線形問題の空間高次元化による非等スペクトル線形問題の定式化（処方）を，天下り的にではあるが，与える．そして，AKNS 階層の空間高次元化を例にとり，その有効性を具体的な計算過程と結果を通して紹介したい[3]．

(記号) 簡単のため, 本稿中の演算子記号として,

$$f_x(x) \equiv \partial_x f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x), \qquad \partial_x^{-1} f(x) \equiv \int_\infty^x f(s)ds, \qquad [\mathcal{A},\ \mathcal{B}] \equiv \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$$

と約束しておく．

[1] $\mathcal{X}$ と $\mathcal{T}$ に少し手を加えると，modified KdV，Zakharov, sine-Gordon 方程式などと等価になることが知られている．

[2]「過ぎない」とは本当はいい過ぎである．多くの可積分系で同様に等スペクトル条件が要求されるのは事実である．また，等スペクトル線形問題が現在では数理科学 や 数理物理学の様々な研究分野に登場してくる．しかし，本稿で考察される問題意識の立場からあえてこのように書いた．

[3] 本稿は，[2] に最新の研究成果を加えてスリム化したものである．

2. 非等スペクトル線形問題の定式化

3 次元時空上の $GL(n)$-値（形式的）波動関数 $\psi = \psi(t,x,z)$ に対して

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ \left(\partial_t - \xi^j \partial_z\right)\psi = \mathcal{N}\psi, \qquad j \in \pm\mathbb{N} \end{cases} \tag{8}$$

と与えられる線形問題について考察する[4]．ここで，$\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$ は適当な演算子であり，ξ は**スペクトル変数**であり，$\xi = \xi(t,z)$ とする．そして，両立条件（可積分条件）：

$$\left(\partial_t - \xi^j \partial_z\right)\psi_x = \partial_x\left\{\left(\partial_t - \xi^j\partial_z\right)\psi\right\} \iff \left[\partial_x,\ \partial_t - \xi^j\partial_z\right] = 0 \tag{9}$$

より，線形問題 (8) は可換条件：

$$\left[\partial_x - \mathcal{M},\ \partial_t - \xi^j\partial_z - \mathcal{N}\right] = 0 \iff \mathcal{M}_t - \mathcal{N}_x + [\mathcal{M},\ \mathcal{N}] - \xi^j \mathcal{M}_z = 0 \tag{10}$$

と等価となる．そして，スペクトル変数 ξ が非線形偏微分方程式：

$$\xi_t = \mathcal{F}(\xi, \xi_z) \tag{11}$$

を満たしうることに注意したい[5]．この非線形偏微分方程式 (11) を **非等スペクトル（*non-isospectral*）条件**と呼びたい．そしてそれに合わせて，線形問題 (8) を**非等スペクトル線形問題**と，可換条件 (10) を**非等スペクトル Lax 方程式**と呼ぶことにする．

ここで，次元還元について少しコメントしておきたい．$\psi_z = \psi_x$（つまり $z = x$）という条件の下で，非等スペクトル（*non-isospectral*）線形問題 (8) は

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ \psi_t = \left(\xi^j\mathcal{M} + \mathcal{N}\right)\psi, \qquad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{12}$$

となり，$\psi_z = \psi_t$ という条件で，

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ \left(1 - \xi^j\right)\psi_t = \mathcal{N}\psi, \qquad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{13}$$

とそれぞれ次元逓減（次元還元）される．これらはともに等スペクトル（*isospectral*）線形問題となり，前者は Korteweg-de Vries(KdV) 階層を，後者は Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 型浅水波階層を与える．

これまでが，非等スペクトル線形問題の統一的な定式化の話である．そして，これから具体的に，2 成分波動関数ベクトル $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ に対する行列演算子 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ が 2 次正方行列：

$$\begin{cases} \mathcal{M} = iF\sigma_3 + Gq\sigma_+ + Gr\sigma_-, \\ \mathcal{N} = A\sigma_3 + B\sigma_+ + C\sigma_-. \end{cases}$$

---

[4] この線形問題の二つ目の左辺に注目してもらいたい．ベクトル場 ∂_z と スペクトル変数 ξ が積の形で現れている．これは KdV 階層などの通常の可積分なソリトン階層とは 決定的に異なる 点である．高崎氏はこの形こそがこの線形問題から出てくる可積分階層が，(反) 自己双対 Yang-Mills 階層 [16] と Bogomolny 階層の中間に位置するのであると主張している．

[5] 行列 $\mathcal{M}$ の成分が ξ を含めば，可換条件 (10) の $\xi^j\mathcal{M}_z$ から出てくる．

の場合に高次元非線形可積分方程式（およびその階層）を構成していく．ここで，$q = q(t,x,z)$，$r = r(t,x,z)$，$F = F(\xi)$，$G = G(\xi)$，$A = A(\xi; q, r, q_x, r_x, ...)$，$B = B(\xi; q, r, q_x, r_x, ...)$，$C = C(\xi; q, r, q_x, r_x, ...)$ であるとする．$(1+1)$ 次元の場合には，

- $(F,G) = (\xi, 1)$ の場合： **AKNS 階層**
- $(F,G) = (\xi^2, \xi)$ の場合: **Kaup-Newell(KN) 階層**
- $(F,G) = (\xi, \xi)$ の場合: **Wadati-Konno-Ichikawa(WKI) 階層**

であることはよく知られている．

非等スペクトル Lax 方程式 (10) より，以下の連立方程式：

$$\underline{iF_t - \xi^j F_z} + A_x + G\left(Br - qC\right) = 0, \tag{14}$$
$$\left(Gq\right)_t - B_x - \xi^j \left(Gq\right)_z - 2i\xi FB - 2GqA = 0, \tag{15}$$
$$\left(Gr\right)_t - C_x - \xi^j \left(Gr\right)_z + 2i\xi FC + 2GrA = 0 \tag{16}$$

をえる．下線部分が非等スペクトル条件 (11) を与える．次に，$j \in \mathbb{N}$ の場合に限定して，具体的に非等スペクトル線形問題における高次元非線形可積分階層をみていく．

2 具体例： 非等スペクトル高次元 AKNS 階層

$(F,G) = (\xi, 1)$ の場合，つまり AKNS 階層の場合には，行列演算子 $\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$ は

$$\begin{cases} \mathcal{M} = -i\xi\sigma_3 \ + \ q\sigma_+ \ + \ r\sigma_-, \\ \mathcal{N} = A\sigma_3 \ + \ B\sigma_+ \ + \ C\sigma_- \end{cases} \tag{17}$$

となる．このとき，非等スペクトル Lax 方程式 (14) ～ (16) より，連立方程式：

$$A_x - qC + Br + i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right) = 0, \tag{18}$$
$$q_t - B_x - \xi^j q_z - 2i\xi B - 2qA = 0, \tag{19}$$
$$r_t - C_x - \xi^j r_z + 2i\xi C + 2rA = 0 \tag{20}$$

をえる．ここで，$A \sim C$ を次のような ξ の冪展開：

$$A = \sum_{k=j_a}^{j_A} A_k \xi^k, \tag{21}$$

$$B = \sum_{k=j_b}^{j_B} B_k \xi^k, \tag{22}$$

$$C = \sum_{k=j_c}^{j_C} C_k \xi^k \tag{23}$$

により，非等スペクトル高次元 AKNS 階層がえられる．但し，$A_j = A(q, r, q_x, r_x, ...)$，$B_j = B(q, r, q_x, r_x, ...)$ および $C_j = C(q, r, q_x, r_x, ...)$ である．そして，これらの冪展開 (21) - (23) を

連立方程式 (18) - (20) に代入する．方程式 (18) より，

$$\sum_{k=j_a}^{j_A}(A_k)_x\,\xi^k-\sum_{k=j_c}^{j_C}qC_k\xi^k+\sum_{k=j_b}^{j_B}B_kr\xi^k=i\left(\xi_t-\xi^j\xi_z\right), \tag{24}$$

方程式 (19) より，

$$\begin{aligned}q_t&=\sum_{k=j_b}^{j_B}(B_k)_x\,\xi^k+\xi^jq_z+2i\sum_{k=j_b}^{j_B}B_k\xi^{k+1}+2\sum_{k=j_a}^{j_A}qA_k\xi^k\\&=\sum_{k=j_b}^{j_B}(B_k)_x\,\xi^k+\xi^jq_z+2i\sum_{k=j_b+1}^{j_B+1}B_{k-1}\xi^k+2\sum_{k=j_a}^{j_A}qA_k\xi^k,\end{aligned} \tag{25}$$

方程式 (20) より，

$$\begin{aligned}r_t&=\sum_{k=j_c}^{j_C}(C_k)_x\,\xi^k+\xi^jr_z-2i\sum_{k=j_c}^{j_C}C_k\xi^{k+1}-2\sum_{k=j_a}^{j_A}rA_k\xi^k\\&=\sum_{k=j_c}^{j_C}(C_k)_x\,\xi^k+\xi^jr_z-2i\sum_{k=j_c+1}^{j_C+1}C_{k-1}\xi^k-2\sum_{k=j_a}^{j_A}rA_k\xi^k\end{aligned} \tag{26}$$

となる．方程式 (24) に注目する．その左辺からは ξ の冪しかでてこないので，右辺にある項はそれ自身が零とならなければならない．つまり，スペクトラル変数 ξ は次の非線形偏微分方程式：

$$\xi_t-\xi^j\xi_z=0 \tag{27}$$

を満たさなければならない．これが，AKNS 階層に対する**非等スペクトル条件**である．そして，このとき A, B, C に対する連立方程式:

$$0=\sum_{k=j_a}^{j_A}(A_k)_x\,\xi^k-\sum_{k=j_c}^{j_C}qC_k\xi^k+\sum_{k=j_b}^{j_B}B_kr\xi^k, \tag{28}$$

$$q_t=\sum_{k=j_b}^{j_B}(B_k)_x\,\xi^k+\xi^jq_z+2i\sum_{k=j_b+1}^{j_B+1}B_{k-1}\xi^k+2\sum_{k=j_a}^{j_A}qA_k\xi^k, \tag{29}$$

$$r_t=\sum_{k=j_c}^{j_C}(C_k)_x\,\xi^k+\xi^jr_z-2i\sum_{k=j_c+1}^{j_C+1}C_{k-1}\xi^k-2\sum_{k=j_a}^{j_A}rA_k\xi^k \tag{30}$$

が**非等スペクトル AKNS 階層**を与える．

$j>0$ に対する各冪展開の上端 j_A, j_B, j_C および 下端 j_a,j_b, j_c を求める．方程式 (29) より

$$j_A=j_B+1=j,\quad j_a=j_b=0 \tag{31}$$

方程式 (30) より

$$j_A=j_C+1=j,\quad j_a=j_c=0 \tag{32}$$

なので，まとめると

$$j_A = j, \quad j_B = j_C = j-1, \quad j_a = j_b = j_c = 0 \tag{33}$$

である．これを連立方程式 (24) - (26) に代入し整理すると，最終的に

$$(A_j)_x \xi^j + \sum_{k=0}^{j-1} \{(A_k)_x - qC_k + B_k r\} \xi^k = 0, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} & q_t - 2qA_0 - (B_0)_x \\ & \quad = (q_z + 2iB_{j-1} + 2qA_j)\xi^j + \sum_{k=1}^{j-1} \{(B_k)_x + 2iB_{k-1} + 2qA_k\} \xi^k, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} & r_t + 2rA_0 - (C_0)_x \\ & \quad = (r_z - 2iC_{j-1} - 2rA_j)\xi^j + \sum_{k=1}^{j-1} \{(C_k)_x - 2iC_{k-1} - 2rA_k\} \xi^k \end{aligned} \tag{36}$$

となる．よって，ξ の冪毎に，$1 \le k \le j-1$ かつ $0 \le k' \le j-1$ （$j, k, k' \in \mathbb{N}$）として，

$$A_j = \alpha_j(t, z), \tag{37}$$

$$B_{j-1} = iq\alpha_j(t, z) + \frac{i}{2} q_z, \tag{38}$$

$$C_{j-1} = ir\alpha_j(t, z) - \frac{i}{2} r_z, \tag{39}$$

$$A_{k'} = \partial_x^{-1} (qC_{k'} - B_{k'} r), \tag{40}$$

$$B_{k-1} = iqA_k + \frac{i}{2} (B_k)_x, \tag{41}$$

$$C_{k-1} = irA_k - \frac{i}{2} (C_k)_x \tag{42}$$

なる連立漸化式[6] と，スカラー場 q および r が満たす連立非線形偏微分方程式：

$$\begin{cases} q_t - 2qA_0 - (B_0)_x = 0, \\ r_t + 2rA_0 - (C_0)_x = 0 \end{cases} \tag{43}$$

をえる．

与えられた $j \in \mathbb{N}$ に対して，帰納的に A_k，B_k，C_k が求まり，そして最終的に，スカラー場 q および r が満たす連立非線形偏微分方程式求まる．それでは，次に $j = 2$ $(2n)$ の場合と $j = 1$ $(2n-1)$ の場合について具体的にみていく．前者が非等スペクトル高次元 KdV 方程式（階層）を，後者が非等スペクトル高次元 NLS 方程式（階層）を与えることが分かる．

[6]普通の漸化式は，$0 \to j$ のように，下から上にあがっていくが，今回は上から下にさがっていく．

2.1 $j=2$の場合

$j=2$の場合，連立漸化式 (37) - (42) より，

$$A_2=\alpha_2, \tag{44}$$

$$B_1=iq\alpha_2+\frac{i}{2}q_z, \tag{45}$$

$$C_1=ir\alpha_2-\frac{i}{2}r_z, \tag{46}$$

$$A_1=-\frac{i}{2}\partial_x^{-1}(qr)_z, \tag{47}$$

$$B_0=\frac{q}{2}\partial_x^{-1}(qr)_z-\frac{\alpha_2}{2}q_x-\frac{q_{xz}}{4}, \tag{48}$$

$$C_0=\frac{r}{2}\partial_x^{-1}(qr)_z+\frac{\alpha_2}{2}r_x-\frac{r_{xz}}{4}, \tag{49}$$

$$A_0=\alpha_2 rq+\frac{1}{4}\partial_x^{-1}(rq_{xz}-qr_{xz}), \tag{50}$$

をえ，このとき連立方程式 (43) は

$$\begin{cases} q_t+\dfrac{q_{xxz}}{4}-\dfrac{1}{2}\left\{q\partial_x^{-1}(qr)_z\right\}_x-\dfrac{q}{2}\partial_x^{-1}(rq_{xz}-qr_{xz})+\alpha_2\left(\dfrac{q_{xx}}{2}-2rq^2\right)=0, \\ r_t+\dfrac{r_{xxz}}{4}-\dfrac{1}{2}\left\{r\partial_x^{-1}(qr)_z\right\}_x+\dfrac{r}{2}\partial_x^{-1}(rq_{xz}-qr_{xz})+\alpha_2\left(2r^2q-\dfrac{r_{xx}}{2}\right)=0 \end{cases} \tag{51}$$

となる．非等スペクトル条件は

$$\xi_t-\xi^2\xi_z=0 \tag{52}$$

である．もう少し具体的に方程式をみてみよう．

- $\alpha_2=0$ および $r=-1$ とすると，Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 [7, 8, 9, 10, 17, 18, 19]：

$$q_t+\frac{1}{4}q_{xxz}+qq_z+\frac{1}{2}q_x\partial_x^{-1}q_z=0 \tag{53}$$

および 非等スペクトル Lax 対：

$$\begin{cases} \mathcal{M}=-i\xi\sigma_3+q\sigma_+-\sigma_-, \\ \mathcal{N}=\frac{1}{4}\left(2i\xi\partial_x^{-1}q_z-q_z\right)\sigma_3+\frac{1}{4}\left(2i\xi q_z-q_{xz}-2q\partial_x^{-1}q_z\right)\sigma_++\frac{1}{2}\left(\partial_x^{-1}q_z\right)\sigma_- \end{cases} \tag{54}$$

をえる．$z=x$ なる次元逓減により，方程式 (53) は KdV 方程式 (7) となる[7]．

- $\alpha_2=0$ および $r=-q$ とすると，modified Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 [7, 17]：

$$q_t+q^2q_z+\frac{1}{2}q_x\partial_x^{-1}(q^2)_z+\frac{1}{4}q_{xxz}=0 \tag{55}$$

---

[7] $q=u$, $\xi=\eta$ と書き直すと，$\mathcal{M}=\mathcal{X}$ および $\mathcal{N}=\mathcal{T}$ となる．

および 非等スペクトル Lax 対：

$$\begin{cases} \mathcal{M} = -i\xi\sigma_3 + q\sigma_+ - q\sigma_-, \\ \mathcal{N} = \frac{1}{2}i\xi\partial_x^{-1}(q^2)_z\sigma_3 + \frac{1}{4}\left\{2i\xi q_z - q_{xz} - 2q\partial_x^{-1}(q^2)_z\right\}\sigma_+ \\ \qquad + \frac{1}{4}\left\{2i\xi q_z + q_{xz} + 2q\partial_x^{-1}(q^2)_z\right\}\sigma_- \end{cases} \tag{56}$$

をえる．$z = x$ なる次元逓減により，方程式 (55) は modified KdV 方程式となる．

2.2 $j = 1$ の場合

$j = 2$ の場合と同様にして，高次元可積分方程式 [20]：

$$\begin{cases} iq_t + q_{xz} - 2q\partial_x^{-1}(qr)_z = 0, \\ ir_t - r_{xz} + 2r\partial_x^{-1}(rq)_z = 0 \end{cases} \tag{57}$$

をえる．これは高次元 Zakharov 方程式と呼ばれる．$r = \pm q^*$ とすれば，高次元 Nonlinear Schrödeinger (NLS) 方程式（高次元 reduced Zakharov 方程式 [7, 8, 9, 10, 21, 22, 23, 24, 25]：

$$q_t - iq_{xz} \pm 2iq\partial_x^{-1}(|q|^2)_z = 0 \tag{58}$$

である．$z = x$ なる次元逓減により，方程式 (57) は Zakharov 方程式と，方程式 (58) は NLS 方程式（reduced Zakharov 方程式）となる．

3 まとめ

本稿では，これまでに断続的に考察されてきた非等スペクトル線形問題の一般的な定式化を与えた．そして，AKNS 階層を例にとり，その有効性を具体的な計算過程と結果を通して紹介した．しかし，紙数制限の関係で，AKNS 階層以外は詳しくは触れることができない．そこで結果のみ簡単に紹介しておく[8]：

- $(F, G) = (\xi^2, \xi)$ の場合，高次元微分型 NLS 方程式：

$$\begin{cases} iq_t + q_z - i\{q\partial_x^{-1}(qr)_z\}_x = 0, \\ ir_t - r_z - i\{r\partial_x^{-1}(rq)_z\}_x = 0 \end{cases} \tag{59}$$

を KN 階層の高次元方程式の例として与えておく．

- $(F, G) = (\xi, \xi)$ の場合，高次元 Harry-Dym 方程式 [26]：

$$q_t + \frac{1}{4}q^3 q_{xxx} + qq_{xx}q_z - qq_xq_{xz} + q^2q_{xxz} + q^3q_{xxx}\partial_x^{-1}\left(\frac{q_z}{q^2}\right) = 0 \tag{60}$$

を WKI 階層の高次元方程式の例として与えておく．

[8] 詳細は別の機会に．

本稿では全く触れていないが既に得られている結果としては，

- 典型的な導出法による（形式的な）保存量の導出 [1, 27, 28, 29]
- Drinfeld-Sokolov 階層の非等スペクトル線形問題

がある．

現在行っている課題としては，

- $j \in -\mathbb{N}$ の場合[9] に対応した非等スペクトル高次元可積分階層の導出
- 3 次正方行列で表現される非等スペクトル線形問題による高次元非線形可積分階層の導出
- 非等スペクトル線形問題と関連する，自己双対 Yang-Mills 階層，拘束系，無分散可積分系 や 行列型可積分系の導出
- 非等スペクトル線形問題の 擬微分演算子による 表現

がある．

謝辞

本研究集会で発表する機会を与えて下さいました世話人の矢野 猛先生（大阪大学大学院工学研究科）に御礼を申し上げます．

本稿を書くにあたり有益な情報 や 参考文献を教えて下さった紺野 公明氏（日本大学・理工），佐々木 隆氏（基礎物理学研究所）および 土田 隆之氏（岡山光量子科学研究所）に感謝します．普段の有益な議論に対して，L. A. Ferreira 氏（サンパウロ大学・サンカルロス校），小林 匡氏（ROHM LSI），中村 厚氏（北里大学・理），澤渡 信之氏（東京理科大学・理工）および 高崎 金久氏（京都大学・人環）の各氏に感謝します．

著者は以下の三氏：
森山 信彦氏（フルハルター），吉宗 史博氏（Pen and message.），和田 哲哉氏（信頼文具舗）に，いつも使い易い文具を提供してくれていることに感謝します．

本研究は，富山県立大学「教養教育特別研究経費」・「新教育プログラム開発・試行・実施支援」及び 部分的に京都大学グローバル COE「普遍性と創発性から紡ぐ次世代物理学」の資金援助を受けて行われていることを附記します．

---

[9] 等スペクトル問題の場合で考えると，sine-Gordon 階層にあたる．

参考文献

[1] 和達 三樹：「非線形波動」(岩波講座現代の物理学 14), 岩波書店 (1992).

[2] 戸田 晃一： 京都大学数理解析研究所「非線形波動現象の数理と応用」, **No.1594**, 105 (2008).

[3] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur： *Studies in Appl. Math.*, **Vol. 53**, 249 (1974).

[4] D. J. Korteweg and G. de Vries： *Phil. Mag.*, **Vol. 39**, 4221 (1895).

[5] S. P. Burtsev, V. E. Zakharov and A. V. Mikhairov： *Theor. Math. Phys.* **Vol. 70**, 227 (1987).

[6] F. Calogero： *Lett. Nuovo Cim.*, **Vol. 14**, 443 (1975).

[7] O. I. Bogoyavlenskii： *Russian Math. Surveys*, **Vol. 45**, 1 (1990).

[8] J. Tafel: *J. Math. Phys.* **Vol. 30**, 706 (1989).

[9] J. Tafel: *J. Math. Phys.* **Vol. 31**, 1234 (1990).

[10] J. Schiff： *NATO ASI* Ser. B, **Vol. 278** (Plenum, New-York), 393 (1992).

[11] P. A. Clarkson, P. R. Gordoa and A. Pickering： *Inverse Problems*, **Vol. 13**, 1463 (1997).

[12] P. R. Gordoa and A. Pickering： *Vol. J. Math. Phys.*, **Vol. 40**, 5749 (1999).

[13] P. G. Estévez： *Inverse Problems*, **Vol. 17**, 1043 (2001).

[14] T. Kobayash and K. Toda： *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **Vol. E88-A**, 2548 (2005).

[15] T. Kobayash and K. Toda： *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **Vol. 2**, paper063 (2006).

[16] （反）自己双対 Yang-Mills 方程式と可積分系との関係は, その深層に Twistor 幾何学がある:

- R.S. Ward: *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **Vol. 315**, 451 (1985).
- L.J. Mason and N.M. Woodhouse: *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society monographs, new series: 15), Oxford UP (1996).
- L. Mason and Y. Nutku: *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society Lecture Note Series 295), Cambridge UP (2003).
- 高崎 金久： ツイスターの世界, 共立出版 (2005).

[17] S-J Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama： *Vol. J. Phys.* A, **31**, 3337 (1998).

[18] K. Toda, S.-J. Yu and T. Fukuyama： *Rep. Math. Phys.*, **Vol. 44**, 247 (1999).

[19] T. Ikeda and K. Takasaki : *International Mathematics Research Notices*, **Vol. 7**, 329 (2001).

[20] V. E. Zakharov: in Solirons, edited by R. K. Bullough and P. J. Caudrey (Springer, Berlin, 1980).

[21] I. A. B. Strachan: *J. Math. Phys.*, **Vol. 33**, 2477 (1992).

[22] I. A. B. Strachan: *Inverse Problems*, **Vol. 8**, L21 (1992).

[23] I. A. B. Strachan: *J. Math. Phys.*, **Vol. 34**, 243 (1993).

[24] Z. Jiang and R. K. Bullough: *Phys. Lett. A*, **Vol. 190**, 249 (1994).

[25] S. Kakei, T. Ikeda and K. Takasaki: *Annales Henri Poincaré*, **Vol. 3**, 817 (2002).

[26] S-J Yu, K. Toda and T. Fukuyama, : *Theor.Math. Phys.*, **Vol. 122 (No 2)**, 256 (2000).

[27] K. Konno, H. Sanuki and Y. H. Ichikawa: *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 52**, 886 (1974).

[28] M.Wadati, H. Sanuki and K. Konno: *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 53**, 419 (1975).

[29] K. Konno and M.Wadati: *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 53**, 1652 (1975).